

ΑΣΚΗΣΗ 5. (1^η)

13/03/2018

- ① Αν τα διανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ είναι γραμ. ανεξ. να δείξετε ότι και τα $\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{v}_1 + \vec{v}_3, \vec{v}_2 + \vec{v}_3$ είναι γραμ. ανεξ.

Θα πρέπει να αποδείξουμε ότι η μοναδική λύση της εξίσωσης $\vec{0} = \lambda(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + \mu(\vec{v}_1 + \vec{v}_3) + \nu(\vec{v}_2 + \vec{v}_3)$.

Είναι $\lambda = \mu = \nu = 0$

Υπολογίζουμε $\vec{0} = (\lambda + \mu)\vec{v}_1 + (\lambda + \nu)\vec{v}_2 + (\mu + \nu)\vec{v}_3$

Επειδή τα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ είναι γραμ. ανεξ. $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda + \nu = 0 \\ \mu + \nu = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \mu = \nu = 0 \end{cases}$$

- 2.) Αν τα διανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ είναι βάση του $\mathbb{R}^3$, εξετάστε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ τα διάνττα $\lambda\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3, \vec{v}_1 + \lambda\vec{v}_2 + \vec{v}_3, \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \lambda\vec{v}_3$ είναι: (α) Γ.Α. και (β) Γ.Ε.

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε, } \vec{0} &= \lambda_1(\lambda\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3) + \lambda_2(\vec{v}_1 + \lambda\vec{v}_2 + \vec{v}_3) + \lambda_3(\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \lambda\vec{v}_3) \\ &= (\lambda\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\vec{v}_1 + (\lambda_1 + \lambda\lambda_2 + \lambda_3)\vec{v}_2 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda\lambda_3)\vec{v}_3 \end{aligned}$$

Επειδή από υπόθεση τα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ βάση θα πρέπει.

$$\begin{cases} \lambda\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Τα παραπάνω ώστε μια έχε μοναδική λύση την μηδενική αν και μόνο αν

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \neq 0$$

ή ισοδύναμα, αν $(\lambda - 1)^2(\lambda + 2) \neq 0$.

Άρα, αν $\lambda \in \mathbb{R} - \{1, -2\}$, τα διάνττα είναι Γ.Α. και αν $\lambda = 1$ ή $\lambda = -2$ τα διάνττα είναι Γ.Ε.

- ③ Να αποδείξετε ότι τα διάνττα $\vec{u}_1 = (1, 1, 4)$, $\vec{u}_2 = (1, 2, 0)$ και $\vec{u}_3 = (3, -3, 4)$ είναι Γ.Α. Να βρείτε α ένα από αυτά ως γραμμικό συνδυασμό των άλλων δύο.

Να συνδίστι είναι να ελέγχουμε αν $\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \rangle = 0$
Υπολογίζουμε:

$$\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \rangle = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Ζητάμε να βρούμε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε: $\boxed{\vec{u}_3 = \lambda \vec{u}_1 + \mu \vec{u}_2}$

ή ισοδύναμα, $(3, -3, 4) = \lambda(1, 1, 4) + \mu(1, 2, 0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 3 \\ \lambda - 2\mu = -3 \\ 4\lambda = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = 2 \end{cases}$$

Επομένως, $\vec{u}_3 = \vec{u}_1 + 2\vec{u}_2$

- ④ Να αποδείξετε ότι τα διάνττα $\vec{u}_1 = (1, 0, -1)$, $\vec{u}_2 = (1, 2, 1)$ και $\vec{u}_3 = (0, -3, 2)$ είναι βάση του $\mathbb{R}^3$

Ζητουμε να βρούμε τις συντεταγμένες του $\vec{v} = (1, 2, 3)$ ως προς των παραπάνω βάση.

$$\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \rangle = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 1(4+3) - 0 + (-1)(-3) = 10$$

Από τα διάνττα $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ Γ.Α. και επειδή είναι 3 ως πλήθος είναι και βάση.

Ζητάμε να βρούμε $\lambda, \mu, \kappa \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $\boxed{\vec{v} = \lambda \vec{u}_1 + \mu \vec{u}_2 + \kappa \vec{u}_3}$

$$\Rightarrow (1, 2, 3) = \lambda(1, 0, -1) + \mu(1, 2, 1) + \kappa(0, -3, 2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ 2\mu - 3\kappa = 2 \\ -\lambda + \mu + 2\kappa = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -3/5 \\ \mu = 2/5 \\ \kappa = 8/5 \end{cases}$$

2.)

13/03/2018

- 7) Αν το $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ είναι κάθετο σε 3 μη συνεπίπεδα διάνκτα τότε να δείξετε ότι $\vec{v} = \vec{0}$

Έστω ότι το $\vec{v}$ είναι κάθετο σε τρία μη συνεπίπεδα διάνκτα $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$. Τα διάνκτα αυτά αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^3$. Άρα, υπάρχουν $\lambda, \mu, \kappa \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $\vec{v} = \lambda \vec{w}_1 + \mu \vec{w}_2 + \kappa \vec{w}_3$

Συνεπώς

$$\begin{aligned} \|\vec{v}\|^2 &= \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \lambda \vec{w}_1 + \mu \vec{w}_2 + \kappa \vec{w}_3 \rangle \\ &= \lambda \langle \vec{v}, \vec{w}_1 \rangle + \mu \langle \vec{v}, \vec{w}_2 \rangle + \kappa \langle \vec{v}, \vec{w}_3 \rangle \\ &\Rightarrow \|\vec{v}\|^2 = 0 \Rightarrow \vec{v} = \vec{0} \end{aligned}$$

- 8) Με την βοήθεια της ανικότητας Cauchy-Schwarz, να βρεθεί η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της παράστασης $g(x, y, z) = x - y + 3z$ όταν $2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 1$.

Η ανικότητα Cauchy λέει ότι αν $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ τότε $-\|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \leq \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \leq \|\vec{a}\| \|\vec{b}\|$.

$$\text{Έχουμε } g(x, y, z) = x - y + 3z = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2}x - \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{3}y + \frac{3}{2} \cdot 2z$$

$$= \left\langle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{2} \right), (\sqrt{2}x, \sqrt{3}y, 2z) \right\rangle$$

Από Cauchy $\Rightarrow |g(x, y, z)| = |\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle|$
και $-\|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \leq \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \leq \|\vec{a}\| \|\vec{b}\|$

όπου

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{9}{4}}$$

$$\|\vec{b}\| = \sqrt{2x^2 + 3y^2 + 4z^2} = 1$$

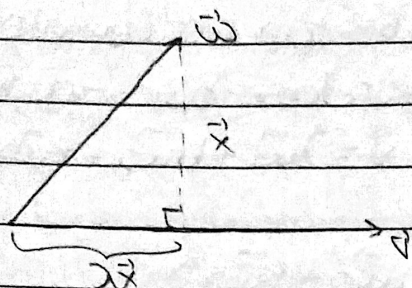
Άρα

$$-\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{9}{4}} \leq g(x, y, z) \leq \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{9}{4}}$$

min max

ΑΣΚΗΣΗ 2 (2°)

- ② Δίνονται τα διανύσματα $\vec{v} = (6, 4, -2)$ και $\vec{w} = (3, -7, 2)$.
 Να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{w}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες
 έτσι ώστε η μία να έχει την διεύθυνση του $\vec{v}$



Πρέπει να βρούμε διάνυσμα $\vec{x} \perp \vec{v}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε.

$$\boxed{\vec{w} = \vec{x} + \lambda \vec{v}}$$

παλλαπλασιάζοντας εσωτερικά με $\vec{v}$ βρίσκουμε.

$$\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{v} \rangle + \lambda \|\vec{v}\|^2$$

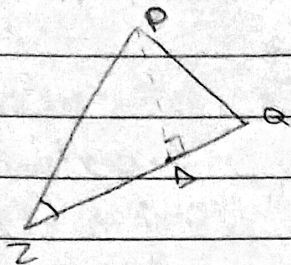
$$\Rightarrow \lambda = \frac{\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|^2}$$

Αντικαθιστώντας τα $\vec{v}, \vec{w}$ βρίσκουμε $\lambda = \frac{-12}{53}$
 Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \vec{w} - \lambda \vec{v} \\ &= \vec{w} - \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{v}\|^2} \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

$$= (3, -7, 2) - \frac{12}{53} (6, 4, -2)$$

- ④ Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $P(1,2)$, $Q(2,3)$ και $Z(-4,3)$.



1ος τρόπος: Βρίσκουμε το μήκος του ύψους PD πάνω στην πλευρά ZQ .

$$\|\vec{PD}\| = \|\vec{ZP}\| \cos \hat{Z}$$

$$E = \frac{1}{2} \|\vec{PD}\| \cdot \|\vec{ZQ}\| \quad (1)$$

Εύρεση γωνίας $\hat{Z}$:

$$\vec{ZQ} = (6, 0)$$

$$\vec{ZP} = (5, -1)$$

$$\langle \vec{ZQ}, \vec{ZP} \rangle = 6 \cdot 5$$

Από την όλην

$$\langle \vec{ZQ}, \vec{ZP} \rangle = \|\vec{ZQ}\| \|\vec{ZP}\| \cos \hat{Z}$$

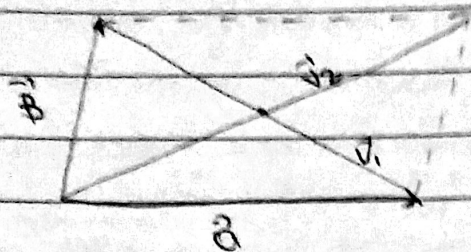
$$\Rightarrow \cos \hat{Z} = \frac{\langle \vec{ZQ}, \vec{ZP} \rangle}{\|\vec{ZQ}\| \cdot \|\vec{ZP}\|} = \frac{5}{\sqrt{26}} \Rightarrow \cos \hat{Z} = \frac{5}{\sqrt{26}} \quad (2)$$

$$\|\vec{PD}\| = \|\vec{ZP}\| \cos \hat{Z} = 5 \quad (3)$$

Αρα αντικαθιστώντας (2), (3) στην (1):

$$E = 15.$$

- 5) Δύο μοναδιαία διάνυσμα $\vec{v}$ και $\vec{\omega}$ σχηματίζουν γωνία $\pi/4$. Να βρεθεί το εμβαδόν του παραλλ. με διαγωνίους τα διανύσματα $2\vec{v}-\vec{\omega}$ και $4\vec{v}-5\vec{\omega}$



Από υπόθεση, οι διαγωνίοι περιγράφονται από τα διάνυσμα

$$\vec{v}_1 = 2\vec{v} - \vec{\omega} \quad \text{και} \quad \vec{v}_2 = 4\vec{v} - 5\vec{\omega}$$

Άρα, αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ διάνυσμα των βάσεων παραλλ. του

τότε,

$$\begin{cases} \vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{v}_2 = 4\vec{v} - 5\vec{\omega} \\ \vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{v}_1 = 2\vec{v} - \vec{\omega} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{\alpha} = 3(\vec{v} - \vec{\omega}) \\ \vec{\beta} = \vec{v} - 2\vec{\omega} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα, } \|\vec{\alpha}\|^2 &= \langle \vec{\alpha}, \vec{\alpha} \rangle = 9(\|\vec{v}\|^2 + \|\vec{\omega}\|^2) - 2(2\vec{v}, \vec{\omega}) \\ &= 9(\|\vec{v}\|^2 + \|\vec{\omega}\|^2 - 2\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{\omega}\| \cos(\vec{v}, \vec{\omega})) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|\vec{\alpha}\|^2 = 9(2 - \sqrt{2})$$

$$\text{Ομοίως βεβαιώμε ότι } \|\vec{\beta}\|^2 = 5 - 2\sqrt{2}$$

Άρα

$$\begin{aligned} E &= \|\vec{\alpha} \times \vec{\beta}\| = \|\vec{\alpha}\| \cdot \|\vec{\beta}\| \sin(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \\ &= \sqrt{9(2 - \sqrt{2})} \sqrt{5 - 2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

7) Να λυθεί η διανυσματική εξίσωση.

$$\vec{x} = \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{x}$$

Έχουμε ότι $\boxed{\vec{x} - \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{x}} \quad (1)$

πολλαπλασιάζοντας εσωτερικά με $\vec{\omega}$ βρίσκουμε ότι.

$$(\vec{\omega} \times \vec{x}) \cdot \vec{\omega} \stackrel{||}{=} \vec{x} \cdot \vec{\omega} - \vec{v} \cdot \vec{\omega}$$

$$\stackrel{||}{=} \vec{v} \cdot \vec{x} - \vec{v} \cdot \vec{\omega}$$

$\leadsto \boxed{(\vec{\omega} \times \vec{x}) \cdot \vec{\omega} = \vec{v} \cdot \vec{x} - \vec{v} \cdot \vec{\omega}} \quad (2)$

από την άλλη $\boxed{(\vec{\omega} \times \vec{x}) \cdot \vec{\omega} = \|\vec{\omega}\|^2 \vec{x} - \langle \vec{x}, \vec{v} \rangle \vec{\omega}} \quad (3)$

Από συνδυάζοντας (2) και (3) έχουμε

$$\|\vec{\omega}\|^2 \vec{x} - \langle \vec{x}, \vec{v} \rangle \vec{\omega} = \vec{v} - \vec{x} - \vec{v} \times \vec{\omega}$$

$$\Rightarrow \boxed{(\|\vec{\omega}\|^2 + 1) \vec{x} - \langle \vec{x}, \vec{\omega} \rangle \vec{\omega} = \vec{v} - \vec{v} \times \vec{\omega}} \quad (4)$$

πολλαπλασιάζοντας την (4) εσωτερικά με $\vec{\omega}$:

$$(\|\vec{\omega}\|^2 + 1) \langle \vec{x}, \vec{\omega} \rangle - \langle \vec{x}, \vec{\omega} \rangle \|\vec{\omega}\|^2 = \langle \vec{v}, \vec{\omega} \rangle$$

Άρα,

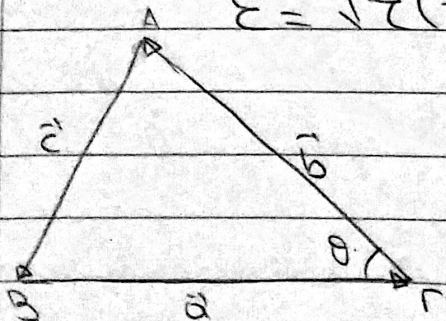
$$\boxed{\langle \vec{x}, \vec{\omega} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{\omega} \rangle} \quad (5)$$

Από (4) και (5) $\Rightarrow \vec{x} = \frac{\vec{v} + \langle \vec{v}, \vec{\omega} \rangle \vec{\omega} - \vec{v} \times \vec{\omega}}{\|\vec{\omega}\|^2 + 1}$

Ασκήσιον (3^η)

9) Αν $\triangle ABC$ με πλευρές a, b, c υ.δ.ο το εμβαδόν που δίνεται από τον τύπο:

$$E = \sqrt{\tau(\tau-a)(\tau-b)(\tau-c)}$$



Θεωρούμε, $\|\vec{a}\| = a$

$\|\vec{b}\| = b$

$\|\vec{c}\| = c, \quad \theta = \angle BCA$

Έχουμε ότι $2E = \|\vec{a} \times \vec{b}\| \Rightarrow 4E^2 = \|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = a^2 b^2 \sin^2 \theta$

$\Rightarrow 4E^2 = a^2 b^2 - a^2 b^2 \cos^2 \theta = a^2 b^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2 \leadsto$

$$\Rightarrow 4\varepsilon^2 = a^2 b^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \quad (1)$$

duos

$$c^2 = \|\vec{c}\|^2 = \|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = a^2 - 2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + b^2$$

$$\Rightarrow \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2 = \frac{(c^2 - a^2 - b^2)^2}{4} \quad (2)$$

Atro (1) kai (2).

$$\Rightarrow 4\varepsilon^2 = a^2 b^2 - \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4}$$

$$\Rightarrow 16\varepsilon^2 = 4a^2 b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2$$